Leggi di decadimento esponenziale

Prof. Ettore Limoli

Premessa

Esistono vari tipi di fenomeni naturali che sono retti da leggi di decadimento che soddisfano a un'equazione differenziale del tipo:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N\,,$$

Eq. 1

dove λ è una costante detta *costante di decadimento*.

Nell'equazione (Eq. 1) *N* rappresenta una quantità che, al variare del tempo *t*, diminuisce fino ad annullarsi del tutto. La rapidità con cui detta quantità varia nel tempo è direttamente proporzionale a *N* stesso.

Esistono vari fenomeni fisici che sono retti da un'equazione differenziale di questo tipo: legge di decadimento radioattivo, legge di scarica di un condensatore e tanti altri fenomeni.

Esistono pure variabili casuali in cui il valore di *N* è determinato dal verificarsi di un certo evento aleatorio. Questo porta a una decrescita di *N* di questo tipo.

Se, ad esempio, lanciamo contemporaneamente N_0 dadi, ciascun dado presenterà un punteggio da 1 a 6 in modo del tutto casuale e indipendente dal risultato conseguito degli altri dadi. Supponiamo di togliere, alla fine del lancio, dagli N_0 dadi iniziali, tutti quelli che presentano il punteggio "5". - Al posto del punteggio "5" potrei fissare un qualsiasi altro punteggio, non cambierebbe nulla. - Ripetiamo il lancio con gli N_1 dadi rimasti. Torniamo, quindi, ad eliminare tutti quelli con punteggio "5" e, con i rimanenti N_2 dadi, ripeteremo il lancio. Eliminati i "5", otterremo un valore N_3 e così via finché non sarà rimasto, più, alcun dado. La legge di decadimento che otterremo, anche in questo caso, sarà di tipo esponenziale.

Integrazione dell'equazione differenziale

L'equazione differenziale (Eq. 1) è a variabili separabili, separandole otteniamo:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt\,,$$

e, integrando:

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt\ ;$$

otteniamo

$$ln|N| = -\lambda t + c.$$

Da cui, passando agli esponenziali:

$$N = ke^{-\lambda t},$$

Eq. 2

dove si è posto $k = e^c$. Inoltre, il valore di *k* conterrà il segno ± dovuto all'eliminazione del valore assoluto. Osservando che, per $t = 0$, *k* assume il valore iniziale di $N(0) = N_0$, la Eq. 2 diventa:

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}.$$

Eq. 3

A volte si introduce una costante di tempo τ, così definita: $\tau = 1/\lambda$.

Tempo di dimezzamento

Il tempo di dimezzamento è il tempo necessario affinché la nostra quantità *N* si riduca del 50%.

Dall'equazione (Eq. 3), posto $N = N_0/2$, si ha:

$$\frac{N_0}{2} = N_0\, e^{-\lambda t}\,;$$

da cui:

$$e^{\lambda t} = 2\,;$$

e, passando agli esponenziali, ricaviamo t:

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2\,.$$

Ad esempio, nei processi di decadimento radioattivo, questo tempo costante è caratteristico della sostanza in uso. Viene quindi usato, ad esempio, per la datazione di oggetti tramite la determinazione della quantità di carbonio-14 (isotopo radioattivo del carbonio) trovato nell'oggetto in esame.

Simulazione in Excel

Ci serviamo ora di Excel per svolgere una simulazione relativa alla decrescita legata al lancio di *N* dadi da cui scartiamo, ad ogni lancio, i dadi con punteggio "5". Il problema è stato esposto nel paragrafo "Premessa".

Introduciamo, inizialmente, un modulo VBA che conterrà la seguente funzione:

```
Option Explicit                 'obbliga a dichiarare le variabili

Public Function lanci(n As Integer) As Integer
 Dim i As Integer               'contatore
 Dim p As Integer               'punteggio
 Dim f As Integer               'frequenza punteggio 5
   Randomize                    'inizializza il generatore di numeri casuali
   f = 0                        'azzera la frequenza
   For i = 1 To n
      p = Int((6 * Rnd) + 1)    'genera numero casuale tra 1 e 6 (dado)
      If p = 5 Then f = f + 1   'aggiorna la frequenza se il punteggio è 5
   Next i
   lanci = f                    'restituisce il valore aggiornato di f
End Function
```

Il listato della funzione non dovrebbe essere di difficile comprensione. La funzione **lanci(n)** restituisce la frequenza con cui si è presentato il punteggio "5".

Per completare la simulazione, prepariamo il foglio di calcolo come segue.

	A	B	C	D	E	F
1	Legge di decadimento			lambda	tao	Tdim
2				0,18	5,62	3,90
3	Step	N	N*			
4	0	10000	10000			
5	1	8319	8370			
6	2	6897	7006			
7	3	5716	5864			
8	4	4744	4909			
9	5	3946	4109			
10	6	3284	3439			
11	7	2777	2879			
12	8	2330	2410			
13	9	1962	2017			
14	10	1593	1688			
15	11	1348	1413			
16	12	1126	1183			
17	13	970	990			
18	14	824	829			
19	15	712	694			
20	16	586	581			
21	17	509	486			
22	18	417	407			
23	19	352	340			
24	20	285	285			

Il piano delle formule è:

	A	B	C	D	E	F
1	Legge di decadi			lambda	tao	Tdim
2				0,177892559921997	=1/lambda	=LN(2)*E2
3	Step	N	N*			
4	0	10000	=$B$4*EXP(-lambda*A4)			
5	1	=B4-lanci(B4)	=$B$4*EXP(-lambda*A5)			
6	2	=B5-lanci(B5)	=$B$4*EXP(-lambda*A6)			
7	3	=B6-lanci(B6)	=$B$4*EXP(-lambda*A7)			
8	4	=B7-lanci(B7)	=$B$4*EXP(-lambda*A8)			
9	5	=B8-lanci(B8)	=$B$4*EXP(-lambda*A9)			

Ovviamente le formule si ripetono allo stesso modo anche per le celle non mostrate in figura.

Il nome assegnato è mostrato sotto.

Gestione nomi ? ×

Nuovo... Modifica... Elimina Filtro ▾

Nome	Valore	Riferito a	Ambito	Commento
lambda	0,18	=Foglio1!$D$2	Cartella ...	

Esaminiamo, ora, come è stato creato il foglio.

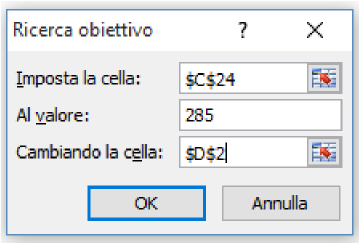
La colonna "Step" rappresenta i vari lanci da 0 (situazione iniziale) fino a 20. Esaminare tutti i lanci possibili fino alla eliminazione di tutti i dadi allungherebbe un po' troppo la tabella senza mostrare nulla di particolarmente significativo.

La colonna N presenta il numero di dadi rimasti prima di effettuare il lancio successivo. Il valore è ottenuto sottraendo al valore iniziale di n la frequenza restituita dalla *Function lanci* (valore dell'esperienza simulata).

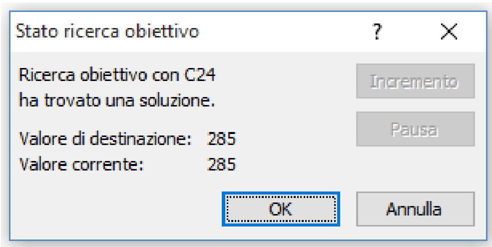
La colonna N* presenta lo stesso valore stimato tramite la funzione teorica data dalla Eq. 3 (valore teorico).

Il valore di lambda (λ) inizialmente è posto a caso, poi, tramite il risolutore, viene determinato il valore in modo che al *20-mo* lancio si ottenga lo stesso valore di N (valore sperimentale).

Tramite il comando **Dati - Analisi di simulazione – Ricerca obiettivo** si apre la seguente finestra di dialogo a cui si forniscono i dati come in figura.

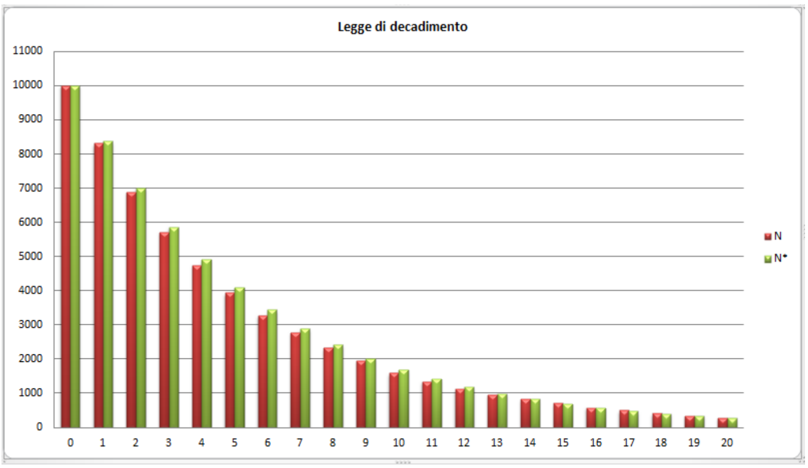


Premendo il pulsante **OK** il valore della cella **[D2]** viene ricalcolato e viene mostrata la seguente finestra di dialogo per chiedere conferma.



Premendo **OK** il valore di *lambda* viene ri-attribuito automaticamente.

A questo punto è opportuno creare un grafico come quello riportato sotto.



Il grafico pone in relazione i dati sperimentali N (barre rosse) con quelli teorici N* (barre verdi).

È evidente un buon accordo tra dati sperimentali e teorici, nonostante il valore iniziale di N = 10000 non sia eccessivamente elevato.

Un approccio differente

Un modello diverso, per l'analisi dei dati, è quello basato sull'analisi di regressione esponenziale. Poiché gli strumenti di calcolo, tipo Excel, non ci forniscono uno strumento diretto, procederemo a una linearizzazione della legge espressa da Eq. 3.

Passando ai logaritmi di ambo i membri, si ha:

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

Dove, posto:

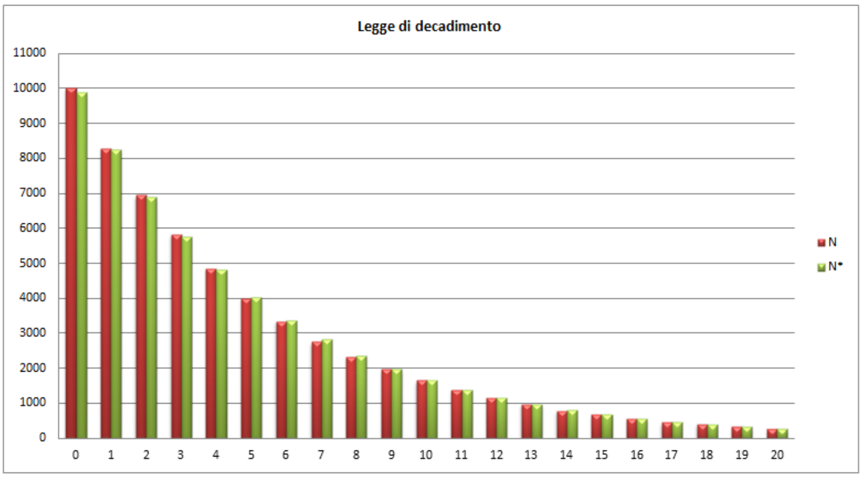
$y = \ln N;\ b = \ln N_0;\ a = -\lambda;\ t = x;$

si ha una retta del tipo: $y = a\,x + b$ che determineremo come retta di regressione lineare.

Una volta determinati i coefficienti a e b, passando agli esponenziali *exp(y) = exp(a x + b)*, otterremo la legge data nella forma usuale dalla Eq. 3.

Il modello Excel è quello riportato sotto.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Legge di decadimento			lambda	tao	Tdim	a	b	corr.
2				0,18	5,57	3,86	-0,17937	9,19812	0,999948
3									
4	Step	N	Ln(N)	N*					
5	0	10000	9,21034	9879					
6	1	8281	9,02172	8256					
7	2	6949	8,84635	6901					
8	3	5835	8,67163	5768					
9	4	4856	8,48797	4820					
10	5	3996	8,29305	4029					
11	6	3333	8,11163	3367					
12	7	2761	7,92335	2814					
13	8	2320	7,74932	2352					
14	9	1963	7,58223	1966					
15	10	1646	7,40610	1643					
16	11	1381	7,23056	1373					
17	12	1148	7,04578	1148					
18	13	965	6,87213	959					
19	14	782	6,66185	802					
20	15	670	6,50728	670					
21	16	557	6,32257	560					
22	17	459	6,12905	468					
23	18	402	5,99645	391					
24	19	336	5,81711	327					
25	20	272	5,60580	273					



Il piano delle formule è:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Legge di decadime			lambda	tao	Tdim	a	b	corr.
2				=-G2	=1/lambda	=LN(2)*E2	=REGR.LIN(C5:C25;A5:A25)	=REGR.LIN(C5:C25;A5:A25)	=CORRELAZIONE(B5:B25;D5:D25)
3									
4	Step	N	Ln(N)	N*					
5	0	10000	=LN(B5)	=EXP($H$2+$G$2*A5)					
6	1	=B5-lanci(B5)	=LN(B6)	=EXP($H$2+$G$2*A6)					
7	2	=B6-lanci(B6)	=LN(B7)	=EXP($H$2+$G$2*A7)					
8	3	=B7-lanci(B7)	=LN(B8)	=EXP($H$2+$G$2*A8)					
9	4	=B8-lanci(B8)	=LN(B9)	=EXP($H$2+$G$2*A9)					
10	5	=B9-lanci(B9)	=LN(B10)	=EXP($H$2+$G$2*A10)					

La funzione REGR.LIN() per essere estesa alle due celle [G2], contenente il valore di *a*, alla cella [H2], contenente il valore di *b*, deve essere inserita come matrice. Si scrive la formula in [G2], si seleziona il Range [G2:H2], si preme il tasto di modifica **F2**, poi i tasti **CRTL+SHIFT+INVIO** e la formula sarà automaticamente estesa.

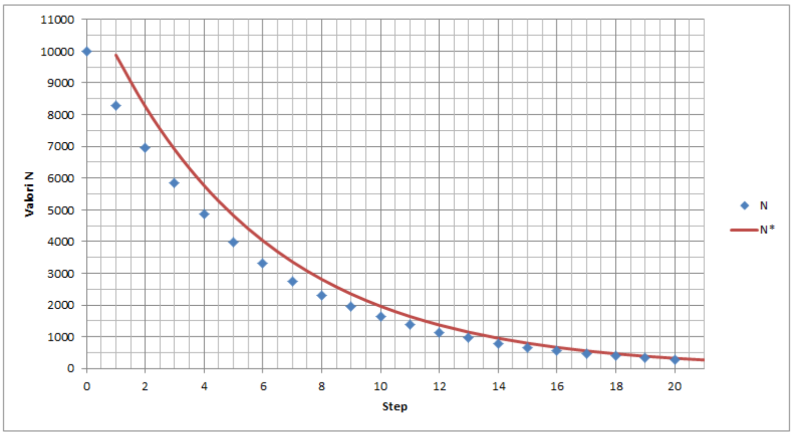
Anche in questo caso il diagramma a barre mostra una buona correlazione fra i dati.

Viene calcolata, in oltre, la correlazione fra i dati sperimentali N (simulazione VBA) e i dati N* calcolati mediante la Eq. 3. In questo caso, il coefficiente di correlazione è moto alto (1 = correlazione perfetta), come si era già notato.

In Tdim si è calcolato il tempo di dimezzamento. È facile verificare dal grafico che all'incirca ogni 4 lanci il valore di N si dimezza.

Infine possiamo introdurre un grafico di dispersione XY in cui riportiamo i valori sperimentali N solo come indicatori (♦) e quelli calcolati N* solo come linea (di colore rosso).

Per ulteriori chiarimenti si consulti la guida online di Excel.



Ovviamente, oltre Excel, si potrebbero usare altri supporti di calcolo ma quanto fatto è sufficiente ad avere una visione del problema e del suo approccio risolutivo.

Prof. Ettore Limoli