Sommario

Le equazioni di Maxwell sono troppo belle per non essere vere …

Questa affermazione, dovuta ad Albert Einstein, sembra esprimere un giudizio estetico ma in effetti è un giudizio di merito che parafrasa un analogo giudizio dello stesso Maxwell.
I fisici, contemporanei di Maxwell, non accettavano pienamente le sue teorie perché esse implicavano, fra l'altro, la correttezza della forza di Lorentz ma questa forza viola il *principio di relatività classica* di Galileo e Newton.
Essendo la forza che un campo magnetico **B** esercita su una carica q direttamente proporzionale alla velocità v con cui si muove la carica: $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (dove $\wedge$ indica un prodotto vettoriale); essa viola il principio di relatività classica che vuole che in sistemi di riferimento inerziali (che si muovono di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro) misurino la stessa forza (essendo per Newton $\mathbf{F} = m \cdot a$) perché misurano accelerazioni identiche.
Se i due sistemi di riferimento misurano velocità diverse anche la forza di Lorentz apparirà diversa.

Einstein dà ragione a Maxwell e sulle trasformate di Lorentz fonda la sua *teoria della relatività*.

In questo breve excursus presenterò le ragioni sperimentali e teoriche che indussero Maxwell a modificare le leggi che danno la circuitazione dei vettori **E** e **B** per poi passare alle sue equazioni e alle implicazioni teoriche di esse.
Concluderò con qualche considerazione che serve a mostrare come l'esperienza corrobora una teoria fisica.

Nota editoriale
In grassetto sono riportate le grandezze vettoriali se non espressamente indicate dalla freccetta sopra.

Il campo elettrico indotto

Estraendo una spira circolare (o rettangolare) da un campo magnetico, la forza di Lorentz, agendo sui portatori di carica presenti nella spira, genera una corrente indotta.
Indicando con q la carica posseduta da ciascun portatore di carica, la forza di Lorentz è data da:

$$\mathbf{F} = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}.$$

Considerando q come positiva, tanto concettualmente non cambia nulla, detta forza è diretta secondo la corrente indotta.
Anziché considerare la corrente indotta come causata da una *f.e.m.* indotta, possiamo considerarla come causata da un campo elettrico indotto.
Pertanto si ha un campo elettrico indotto:

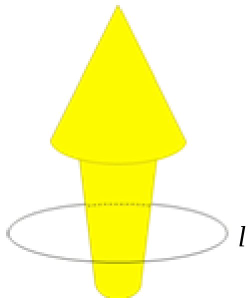
$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Il campo elettrico indotto è indipendente dai portatori di carica. Ossia esso esiste anche se non c'è la spira.
La variazione del flusso del campo magnetico genera un campo elettrico indotto diretto secondo la corrente indotta.
Calcolando la circuitazione lungo una linea di campo *l*, perpendicolare alla variazione del flusso di B che l'ha determinata, si ha:

$$C_{[l]}\,(E) = v\,B\,l$$

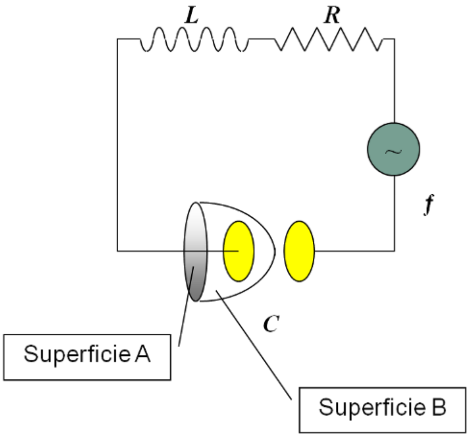
Ossia la circuitazione lungo una linea chiusa *l* è uguale alla f.e.m. indotta e, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ha:

$$C_{[l]}(\vec{E}) = -\frac{d\,\Phi(\vec{B})}{dt}$$



Il paradosso del teorema di Ampere

Se colleghiamo un condensatore ad un generatore di corrente continua si ha un breve passaggio di corrente nel circuito finché il condensatore non si carica dopodiché la corrente cessa. Se, invece, si collega un generatore di corrente alternata (alternatore) la corrente persiste nel tempo finché non la si interrompe staccando il generatore.
Nel circuito in figura la linea *l* delimita due superfici A e B.



Attraverso la superficie A, per il teorema di Ampere, si ha:

$$C_{[l]}(\mathbf{B}) = \mu\, i$$

Dove μ (μ_0 nel caso che il mezzo sia il vuoto) è la permeabilità magnetica del mezzo e i la corrente concatenata alla linea chiusa l.
Attraverso la superficie B (essendo i = 0), invece, si ha:

$$C_{[l]}(\mathbf{B}) = 0$$

Maxwell supera il paradosso ammettendo che all'interno del condensatore vi sia una corrente detta di spostamento i*. Pertanto la corrente concatenata con A sarà i, quella concatenata con B i^*.
Da quanto affermato si ha che la circuitazione è data da:

$$C_{[l]}(\mathbf{B}) = \mu\,(i + i^*)$$

Determiniamo ora i^*.
All'interno del condensatore, considerando le armature di area S, per il teorema di Coulomb si ha che E = σ/ε, dove $\sigma = q/S$ è la densità di carica. Pertanto il flusso di **E** è dato da:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sigma}{\varepsilon} S = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{S} S = \frac{q}{\varepsilon}$$

Da cui:

$$q = \varepsilon \cdot \Phi(\vec{E})$$

Derivando ambo i membri:

$$i^* = \frac{d\,q}{dt} = \varepsilon\,\frac{d\,\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Pertanto il teorema di Ampere viene così modificato da Maxwell.

Le equazioni di Maxwell

Maxwell assume le seguenti quattro equazioni come principi da cui derivare tutte le leggi dell'elettromagnetismo.

1. Teorema di Gauss: flusso di **E** attraverso una superficie chiusa.

   $$\Phi\,(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon}$$

2. Teorema di Gauss: flusso di **B** attraverso una superficie chiusa.

   $$\Phi\,(\vec{B}) = 0$$

3. Teorema di Ampere Maxwell: Circuitazione di **B** lungo una linea chiusa.

   $$C\left(\vec{B}\right) = \mu\left(\ i + \varepsilon\,\frac{d\ \Phi\left(\vec{E}\right)}{dt}\right)$$

4. Legge di Faraday-Neumann-Lenz: Circuitazione di **E** lungo una linea chiusa.

   $$C\left(\vec{E}\right) = -\ \frac{d\ \Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

Se consideriamo quante quantità diverse sono riunite in queste equazioni, sorprende la loro semplicità. Esse avrebbero potuto richiedere pagine e pagine, ma come vediamo non è così.

La prima delle quattro equazioni di Maxwell dice in che modo un campo elettrico dovuto a cariche elettriche (per esempio elettroni) varia con la distanza (esso diventa tanto più debole quanto più cresce la distanza). Il campo, inoltre, è tanto più intenso quanto maggiore è la densità di carica (quanto più grande è il numero di elettroni contenuti in uno spazio dato).
La seconda equazione ci dice che nel magnetismo non c'è una proporzione paragonabile alla prima, in quanto le "*cariche*" magnetiche (o "*monopoli*" magnetici) ipotizzate da Mesmer non esistono: se tagliamo in due parti un magnete a barra, non otterremo un polo *nord* e un polo *sud* isolati, ma ogni pezzo della calamita avrà un suo polo *nord* e un suo polo *sud*.
La terza equazione ci dice in che modo un campo elettrico variabile (o una corrente elettrica) induce un campo magnetico.
La quarta equazione descrive l'inverso: in che modo un campo magnetico variabile induce un campo elettrico.
Le quattro equazioni sono essenzialmente formulazioni ottenute dai risultati di numerosissimi esperimenti di laboratorio.

Maxwell si spinse oltre ipotizzando la forma assunta dalle sue equazioni nello spazio vuoto in cui non ci sono cariche elettriche e correnti elettriche.
Sembrerebbe ovvio prevedere che nel vuoto non ci siano né campi elettrici né campi magnetici, tuttavia Maxwell suggerì la forma assunta delle sue equazioni in dette condizioni:

1. <u>Teorema di Gauss</u>: flusso di **E** attraverso una superficie chiusa.

   $$\Phi(\vec{E}) = 0$$

2. <u>Teorema di Gauss</u>: flusso di **B** attraverso una superficie chiusa.

   $$\Phi(\vec{B}) = 0$$

3. <u>Teorema di Ampere Maxwell</u>: Circuitazione di **B** lungo una linea chiusa.

   $$C\left(\vec{B}\right) = \mu_0\ \varepsilon_0\ \frac{d\ \Phi\left(\vec{E}\right)}{dt}$$

4. <u>Legge di Faraday-Neumann-Lenz</u>: Circuitazione di **E** lungo una linea chiusa.

   $$C\left(\vec{E}\right) = -\ \frac{d\ \Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

Maxwell fissò q = 0 per indicare che non ci sono cariche elettriche. Pose anche i = 0 per indicare che non ci sono correnti elettriche. Non eliminò però l'ultimo termine nella terza equazione, μ_0 (*mu con zero*) ε_0 (*epsilon con zero*) per la derivata di **E** rispetto al tempo t, la debole corrente di spostamento nei materiali isolanti. Perché no? Come si può vedere dalle equazioni, l'intuizione di Maxwell conservò la simmetria fra i campi magnetico ed elettrico. Persino nel vuoto, nella totale assenza di elettricità, o addirittura di materia, Maxwell suggerì che un campo magnetico variabile suscita un campo elettrico e viceversa.

Le equazioni dovevano rappresentare la natura, e la natura, secondo Maxwell, doveva essere bella ed elegante.
Questo giudizio, in parte estetico, da parte di un fisico secchione, del tutto sconosciuto tranne che a pochi altri scienziati accademici, ha fatto di più per plasmare la nostra civiltà di dieci presidenti e primi ministri scelti a piacere. (*Carl Sagan*)

In breve, le quattro equazioni di Maxwell nel vuoto dicono che:
1) non ci sono cariche elettriche;
2) non ci sono monopoli magnetici;
3) un campo elettrico variabile genera un campo magnetico;
4) un campo magnetico variabile genera un campo elettrico.

Maxwell riuscì a dimostrare matematicamente, partendo dalle sue equazioni, che **E** e **B** si propagano nello spazio vuoto come se fossero ***onde***.
Egli poté inoltre calcolare la velocità dell'onda che è data da:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}9979 \cdot 10^8\ m/s$$

Poiché, all'epoca, ε_0 e μ_0 erano già stati misurati in laboratorio, Maxwell trovò che la velocità con cui il campo elettrico e il campo magnetico dovrebbero propagarsi nel vuoto era, sorprendentemente, la stessa già misurata per la luce.
L'accordo era troppo preciso per essere casuale!
Elettricità e magnetismo risultarono essere profondamente legati alla natura della luce.

Poiché la luce sembrava comportarsi come un'onda e derivare dai campi elettrico e magnetico, Maxwell la descrisse come un'onda elettromagnetica.
Trovò, inoltre, che la densità di energia del campo elettromagnetico è data da:

$$W = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,B^2$$

Molti anni dopo, meditando sulla natura della luce, Albert Einstein scrisse:

"***A pochi uomini al mondo tale esperienza avrebbe potuto dire qualcosa***".

Lo stesso Maxwell fu sconcertato dai risultati. Il vuoto sembrava agire come un dielettrico. Egli si spinse oltre affermando che il vuoto poteva essere "*polarizzato elettricamente*".

Vivendo in un'epoca meccanicistica, Maxwell si sentì costretto a offrire un modello meccanico per la propagazione di un'onda elettromagnetica nel vuoto perfetto. Immaginò perciò che lo spazio, anzi l'intero universo, fosse permeato da una misteriosa sostanza che chiamò ***etere***, il quale costituiva il mezzo di propagazione dei campi elettrici e magnetici variabili nel tempo.
Le vibrazioni dell'etere erano la ragione per cui la luce si propagava attraverso di esso, proprio come le onde dell'acqua si propagano nell'acqua e le onde acustiche nell'aria. Ma doveva essere una sostanza molto strana quest'etere: molto sottile, *spettrale*, quasi incorporea.
Il Sole e la Luna, i pianeti e le stelle dovevano passare attraverso di esso senza esserne rallentati, senza neppure accorgersene.
Eppure esso doveva essere abbastanza rigido da sostenere tutte queste onde che in esso si propagano con una velocità prodigiosa.

La parola *"etere"* viene ancora usata saltuariamente, senza che l'uso del termine implichi più l'accettazione del concetto. Quando nei primi tempi della radio, si diceva che le sue onde si propagano "nell'aria", si intendeva dire nell'etere.
Oggi è ovvio però che le onde radio si propagano nel vuoto: uno dei principali risultati conseguiti da Maxwell. Tali onde non hanno bisogno dell'aria per propagarsi. La presenza dell'aria è per loro, semmai, un impedimento.
L'idea della luce e della materia in moto attraverso l'etere avrebbe condotto, in capo ad altri 40 anni, alla teoria della relatività ristretta di Einstein, alla formula $E = m\,c^2$ e a molte altre cose.
La relatività e gli esperimenti che condussero ad essa mostrarono in modo conclusivo che non c'è alcun etere a sostenere la propagazione delle onde elettromagnetiche, come scrive Einstein nel suo famoso articolo *"Sull'elettrodinamica di corpi in movimento"*.

Le onde si propagano da sé.

Il campo elettrico variabile genera un campo magnetico. Campo magnetico ed elettrico si sostengono a vicenda.
Molti fisici furono profondamente turbati dalla fine dell'*etere luminifero*. Essi avevano bisogno di un qualche modello meccanico per rendere ragionevole, plausibile, comprensibile l'intera nozione della propagazione della luce nel vuoto. Un tale modello è però un espediente, un sintomo delle nostre difficoltà a riconoscere ambiti in cui il senso comune non serve più.

Il fisico **Richard Feynman** lo descrisse così:

"Oggi noi comprendiamo meglio che ciò che conta sono le equazioni stesse, e non il modello usato per ottenerle. Possiamo soltanto chiederci se le equazioni siano vere o false. Otteniamo la risposta a questa domanda facendo esperimenti, e un gran numero di esperimenti hanno confermato le equazioni di Maxwell. Se togliamo le impalcature usate per costruirlo, troviamo che il bell'edificio di Maxwell sta in piedi da solo."

Ma che cosa sono questi campi elettrici e magnetici che permeano tutto lo spazio?
Noi ci sentiamo molto più a nostro agio con l'idea di cose che si toccano e oscillano, che spingono e tirano, piuttosto che con *campi* che muovono come per magia degli oggetti a distanza, o con semplici astrazioni matematiche.
Ma, come sottolineò Feynman, la nostra sensazione che nella vita quotidiana ci siano effettivamente contatti fisici solidi, sensibili - come quando, per esempio, prendiamo e usiamo un coltello - è erronea. Che cosa significa un contatto fisico? Che cosa accade esattamente quando prendiamo un coltello, o spingiamo un'altalena, o produciamo un'onda in un materasso d'acqua premendo periodicamente su di esso?
Se consideriamo la cosa in profondità, troviamo che non c'è alcun contatto fisico. Sono le cariche elettriche presenti sulla nostra mano a influire sulle cariche elettriche sul coltello o sull'altalena o sul materasso d'acqua, e viceversa.
Nonostante quanto sembrano dirci l'esperienza quotidiana e il senso comune, anche qui c'è solo interazione di campi elettrici.

Nulla tocca nulla!

Nessun fisico ha mai preso l'avvio da un senso di intolleranza nei confronti delle nozioni del senso comune, o dal desiderio di sostituirle con qualche astrazione matematica comprensibile solo da raffinati fisici teorici. I fisici partono, come tutti noi, da un'esperienza fondata su confortevoli nozioni del senso comune. Il guaio è che la natura non accondiscende ai nostri desideri. Se noi rinunciamo a insistere sulle nostre nozioni di come la natura *dovrebbe* comportarsi, ma ci poniamo dinanzi alla natura con mente aperta e ricettiva, troviamo che spesso il buon senso non funziona. Perché? Perché le nostre nozioni, sia ereditarie sia apprese, di come funziona la natura presero forma nei milioni di anni in cui i nostri progenitori furono cacciatori e raccoglitori. Nel nostro caso il senso comune è una guida infedele perché la vita di nessun cacciatore-raccoglitore dipese mai dalla comprensione di campi elettrici e magnetici variabili nel tempo. L'ignoranza delle equazioni di Maxwell non fu mai punita dall'evoluzione.
Ai nostri tempi è diverso. Le equazioni di Maxwell mostrano che un campo elettrico rapidamente variabile, con $d(\mathbf{E})/dt$ grande, dovrebbe generare onde elettromagnetiche.

Nel 1888 il fisico tedesco Heinrich Hertz fece l'esperimento e trovò di avere generato un nuovo tipo di radiazione, le onde radio. Sette anni dopo alcuni scienziati britannici a Cambridge trasmisero segnali radio su una distanza di un chilometro. Il 12 dicembre 1901 l'italiano Guglielmo Marconi usò onde radio per trasmettere un segnale dalla Cornovaglia a Terranova, attraverso l'Oceano Atlantico.

Il collegamento economico, culturale e politico del mondo moderno per mezzo di torri di radiodiffusione circolare, ripetitori a microonde e satelliti per telecomunicazioni risale direttamente all'intuizione di Maxwell che gli fece introdurre nelle sue equazioni, nel vuoto, le correnti di spostamento. Lo stesso vale per la TV, per il radar, che potrebbe essere stato l'elemento decisivo nella Battaglia d'Inghilterra e nella sconfitta dei nazisti nella 2ª guerra mondiale; per il controllo e la

navigazione di aerei, navi e sonde spaziali; per la radioastronomia e la ricerca di esseri intelligenti nel cosmo; e per aspetti significativi delle industrie elettroniche e microelettroniche.
La nozione di campo di Faraday e Maxwell ha avuto inoltre un'influenza enorme nella comprensione del nucleo atomico, della meccanica quantistica e della struttura fine della materia. L'unificazione, a opera di Maxwell, dell'elettricità, del magnetismo e della luce in un tutto matematico coerente ispirò i tentativi successivi, alcuni dei quali coronati da successo, altri tuttora in stadi rudimentali, di unificare in una grande teoria tutti gli aspetti del modo fisico, comprese la gravità e le forze nucleari.
Si può ben dire che fu Maxwell a dare inizio all'epoca della fisica moderna!

Gauss implica Coulomb

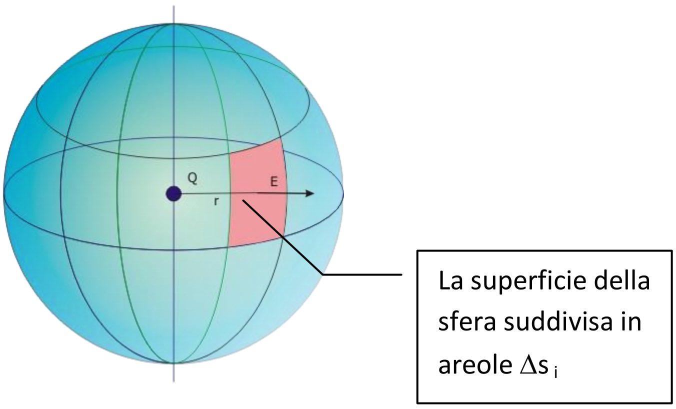
Per dare un esempio su come, a partire dalle equazioni di Maxwell, si possano dedurre tutte le leggi dell'elettromagnetismo, dimostriamo che il teorema di Gauss (prima equazione di Maxwell) implica la legge di Coulomb.
Siano Q e q due cariche poste a distanza r una dall'altra. Se consideriamo una sfera di centro il punto dove è posta Q e raggio r il flusso, attraverso detta sfera è:

$$\Phi = Q / \varepsilon \qquad (*)$$

Se calcoliamo il flusso dalla sua definizione, dividendo la superficie della sfera in areole molto piccole Δs_i a cui le linee di campo sono perpendicolari in ogni punto, si ha:

$$\Phi = E\, \Sigma\, \Delta s_i = E\,(4\, \pi\, r^2) \qquad (**)$$

Poiché $\Sigma\, \Delta s_i$ è la superficie dell'intera sfera.



Dal confronto tra (*) e (**) essendo uguali i primi membri, si ha:

$$E = \frac{1}{4\, \pi\, \varepsilon} \frac{Q}{r^2}$$

Quindi sulla carica q agirà una forza:

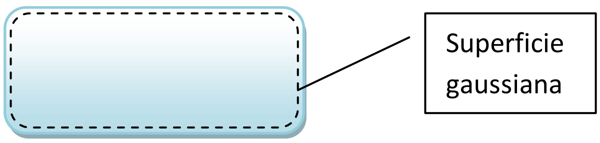
$$F = q \cdot E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\,Q}{r^2}$$

Che è quanto si voleva provare.

Il teorema di Gauss è dimostrabile se si postula che il campo al quale si riferisce è basato su una legge del tipo F inversamente proporzionale al quadrato delle distanze. È valida anche l'affermazione inversa: se si dà come postulato l'enunciato di Gauss, da esso possiamo ricavare come teorema dimostrabile che la legge del campo è di questo tipo. In altre parole, nel caso del campo elettrico, se l'esperienza suggerisce e conferma la legge di Coulomb, la matematica dimostra il teorema di Gauss per l'elettrostatica; viceversa, se l'esperimento dà validità all'enunciato di Gauss elettrostatico, la matematica permette di dimostrare la relazione di Coulomb.
Storicamente è nata prima la legge di Coulomb e il teorema di Gauss risulta dedotto da essa. Attualmente, però, si dà maggiore certezza sperimentale e maggiore importanza teorica al teorema di Gauss (anche se gli si conserva per tradizione il nome di *teorema*) e si considera la legge di Coulomb discendente da esso. La ragione di questa nuova impostazione sta nel fatto che la dimostrazione diretta della legge di Coulomb con la bilancia di torsione o altri dispositivi analoghi ha fatto ben pochi progressi dal tempo del suo ideatore e i margini di incertezza sono ancora molto grandi. Il teorema di Gauss invece è dimostrabile sperimentalmente, come vedremo, con un'incertezza di una parte su dieci miliardi.
La scelta è inoltre suggerita da considerazioni teoriche: la legge di Coulomb presenta il fenomeno dal punto di vista dell'azione a distanza tra carica e carica, ignorando l'esistenza del campo, mentre il teorema di Gauss parte dall'esistenza del campo E mettendone in evidenza la fondamentale importanza. Ora è evidente, al lume di quanto detto, che è basilare accogliere la seconda impostazione, in particolare nel caso dei campi che variano nel tempo.

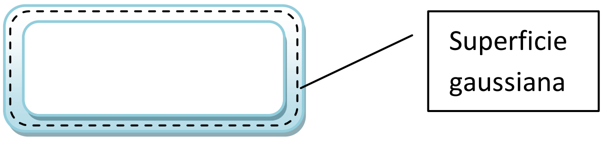
Verifica sperimentale del teorema di Gauss

Ricordando che caratteristica dei conduttori è la grande mobilità di particelle cariche (elettroni) all'interno di essi. Questo fatto porta come conseguenza che, in condizioni statiche, all'interno di un conduttore il campo elettrico deve essere nullo. Infatti, se ciò non fosse, il campo agirebbe su ogni particella carica con una forza pari a q·E e la particella non potrebbe permanere in quiete. Se dunque poniamo delle cariche su un conduttore isolato esse si devono distribuire in modo da determinare un campo nullo in ogni punto interno al conduttore. Applicando il teorema di Gauss vediamo come deve avvenire tale distribuzione.
In figura è rappresentato un conduttore isolato carico; la linea punteggiata sia una superficie ideale interna al conduttore. In tutti i punti di tale superficie, per quanto abbiamo detto sopra, il campo è nullo ed è nullo perciò anche il flusso totale di E attraverso essa.



Dal teorema di Gauss si deduce che deve essere nulla la carica complessiva all'interno della superficie gaussiana: Σ q = O.
Il ragionamento vale per qualsiasi superficie ideale purché interna al conduttore: l'eccesso di carica, in condizioni statiche, può dunque distribuirsi solo sulla superficie esterna del conduttore stesso.

Si noti che la deduzione è valida anche se il conduttore è cavo.



In condizioni statiche la carica posta su un conduttore si distribuisce tutta sulla sua superficie esterna, sia esso pieno o cavo.
Qualunque prova sperimentale che accerti la fondatezza delle considerazioni ora dedotte dal teorema di Gauss, è una verifica diretta del teorema stesso.
Prima che Gauss formulasse il suo teorema, l'assenza di cariche all'interno di un conduttore isolato era stata osservata da Franklin e successivamente da Faraday i quali non seppero dare una spiegazione del fenomeno.
L'esperimento di Faraday è facilmente ripetibile in laboratorio e comporta una misura a zero, molto più precisa di qualsiasi misurazione come, ad esempio, quella fatta con una bilancia di torsione.