Derivazione numerica

Prof. Ettore Limoli

Premessa

In generale, il calcolo della derivata di una funzione non presenta particolari problemi. Tuttavia, in molti casi, può essere utile rifarsi ad una approssimazione numerica per evitare inutili perdite di tempo.

Uno di questi casi è dato dall'uso di una funzione iterativa che se ne serve. Ad esempio, la funzione iterativa di Newton, per il calcolo degli zeri di una funzione, necessita della derivata.

In casi come questo, non siamo interessati a conoscere il valore della funzione derivata ma i valori da essa assunti in vari punti.

Se ci muoviamo nell'ambito di una classe di funzioni, tutte di un certo tipo (vedi esempio della lezione sul calcolo del tasso di ammortamento), allora può andar bene precalcolare la derivata, più in generale questo non serve.

Tabulazione e grafico di una funzione con la sua derivata

Se ci proponiamo di tabulare una funzione e la sua derivata, magari al fine di ricavarne un grafico, una approssimazione numerica della derivata può andar bene.

Ricordiamo che, per il teorema di Lagrange, se *f(x)* è una funzione continua in un intervallo [*a, b*], chiuso e limitato, e ivi internamente derivabile, allora esiste un punto $c \in \,]a, b[$ tale che: *f'(c) =[f(b)-f(a)]/(b-a)*.

Ora, se [*a, b*] è un intorno di *x,* sufficientemente piccolo, si ha che $f'(x) \to f'(c)$ per ogni $x \in \,]a, b[$. Pertanto, ci serviremo della seguente formula di approssimazione:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$$

Eq. 1

dove h è un valore positivo sufficientemente piccolo.

Applicando Eq. 1 alla funzione *f'(x)*, otteniamo una approssimazione della derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)}{4\,h^2}$$

Eq. 2

Se fissiamo un *h* troppo piccolo l'approssimazione può peggiorare anziché migliorare. È opportuno quindi fare qualche prova in modo da scegliere un h che possa andar bene in ogni caso.

Un esempio in Excel

In primo luogo iniziamo col definire due funzioni VBA: la *f(x),* oggetto del nostro studio, e la sua derivata prima espressa mediante Eq. 1 .

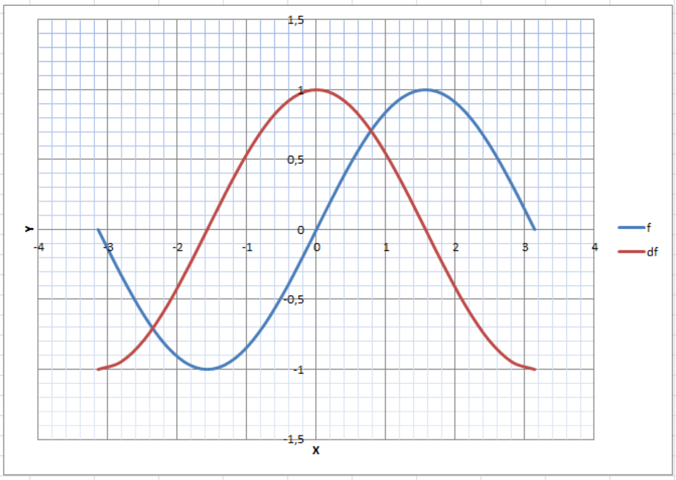
```
Public Function f(x As Double) As Double
   f = Sin(x)
End Function
```

```
Public Function df(x As Double) As Double
Const h = 0.000001
   df = (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
End Function
```

Ci proponiamo di tabulare sen(x) con la sua derivata in [-π, π].

Nella sottostante figura è riportata l'impostazione del foglio Excel

	A	B	C	D
1	a	b	dx	
2	-3,14159	3,141592654	0,330693964	
3				
4	I	x	f	df
5	0	-3,1415926536	0,0000000000	-1,0000000001
6	1	-2,8108986901	-0,3246994692	-0,9458172418
7	2	-2,4802047265	-0,6142127127	-0,7891405095
8	3	-2,1495107630	-0,8371664783	-0,5469481582
9	4	-1,8188167994	-0,9694002659	-0,2454854871
10	5	-1,4881228359	-0,9965844930	0,0825793455
11	6	-1,1574288724	-0,9157733267	0,4016954246
12	7	-0,8267349088	-0,7357239107	0,6772815717
13	8	-0,4960409453	-0,4759473930	0,8794737512
14	9	-0,1653469818	-0,1645945903	0,9863613034
15	10	0,1653469818	0,1645945903	0,9863613034
16	11	0,4960409453	0,4759473930	0,8794737512
17	12	0,8267349088	0,7357239107	0,6772815717
18	13	1,1574288724	0,9157733267	0,4016954246
19	14	1,4881228359	0,9965844930	0,0825793455
20	15	1,8188167994	0,9694002659	-0,2454854871
21	16	2,1495107630	0,8371664783	-0,5469481582
22	17	2,4802047265	0,6142127127	-0,7891405095
23	18	2,8108986901	0,3246994692	-0,9458172418
24	19	3,1415926536	0,0000000000	-1,0000000001
25				



Il piano delle formule:

	A	B	C	D
1	a	b	dx	
2	=-PI.GRECO()	=PI.GRECO()	=(b-a)/19	
3				
4	I	x	f	df
5	0	=a+dx*I	=f(B5)	=df(B5)
6	1	=a+dx*I	=f(B6)	=df(B6)
7	2	=a+dx*I	=f(B7)	=df(B7)
8	3	=a+dx*I	=f(B8)	=df(B8)

I nomi sono:

Gestione nomi

Nome	Valore	Riferito a	Ambito	Commento
a	-3,141592654	=Foglio1!$A$2	Cartella ...	
b	3,141592654	=Foglio1!$B$2	Cartella ...	
dx	0,330693964	=Foglio1!$C$2	Cartella ...	
I	{"0";"1";"2";"3";"4";...	=Foglio1!$A$5:$A$24	Cartella ...	

La funzione viene tabulata in venti punti che variano al variare di un indice *i* da 0 a 19. Ogni punto disterà dal precedente $dx = (b-a)/19$. I punti sono dati da $x_i = a + dx \cdot i$ con $i = 0; 1; \ldots 19$.

Quindi si avrà: $x_0 = a; x_{19} = b$.

Uso della funzione iterativa di Newton

Come esempio d'uso della derivata prima e seconda, aggiungiamo le seguenti funzioni VBA. Ci proponiamo di determinare la soluzione positiva dell'equazione: $sen\ x = x^2$, nell'intervallo [0; 1].

```
Public Function f(x As Double) As Double
   f = Sin(x) - x ^ 2
End Function

Public Function df(x As Double) As Double
Const h = 0.000001
   df = (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
End Function

Public Function ddf(x As Double) As Double
Const h = 0.000001
    ddf = (f(x + 2 * h) + f(x - 2 * h) - 2 * f(x)) / (4 * h ^ 2)
End Function

Public Function FINewton(x As Double) As Double
Dim x0 As Double
Const Er = 0.000000001

   If Sgn(f(x)) <> Sgn(df(x)) Then
      MsgBox "Putto d'innesco non valido", 0, "Funzione iterativa di Newton"
      FINewton = 1 / 0       ‘ forza una condizione d’errore
      Exit Function
   End If
   Do
      x0 = x
      x = x - f(x) / df(x)
   Loop Until Abs(x - x0) < Er
   FINewton = x
End Function
```

La tabulazione della derivata seconda serve a mostrarci il segno che essa assume al fine di verificare che non si annulli nell’intervallo considerato. Un cambiamento di segno della derivata seconda indicherebbe la presenza di un punto in cui essa si annulla.

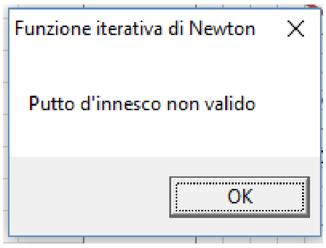
Si potrebbe aggiungere al *loop* della *function* FINewton un contatore. Se, ad esempio, dopo 20 iterazioni l’algoritmo non converge si lascia un messaggio segnalando la mancata convergenza.

```
C=0                                ‘ azzera il contatore
Do
      C = C + 1                    ‘ incrementa il contatore
      If c  > 20 then
            MsgBox "Non converge", 0, "Funzione iterativa di Newton"
            FINewton = 1 / 0       ‘ forza una condizione d’errore
            Exit Function
      End if
      x0 = x
      x = x - f(x) / df(x)
 Loop Until Abs(x - x0) < Er
```

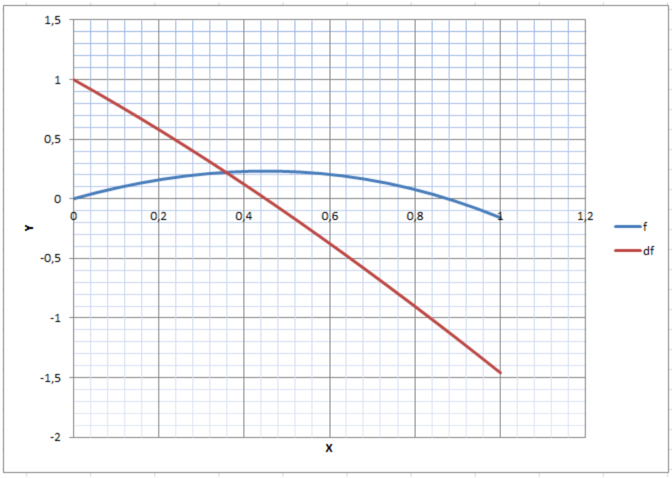
Il foglio utilizza le funzioni introdotte ed è stato così ampliato al fine di tabulare la funzione e le sue derivate, prima e seconda, e utilizzare le x opportune come valore d’innesco per la funzione iterativa di Newton.

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	dx			
2	0	1	0,052631579			
3						
4	I	x	f	df	ddf	FI Newton
5	0	0,0000000000	0,0000000000	1,0000000000	-2,0000000001	
6	1	0,0526315789	0,0498372002	0,8933521203	-2,0526063488	
7	2	0,1052631579	0,0939885414	0,7839386317	-2,1050695909	
8	3	0,1578947368	0,1323087339	0,6717710284	-2,1572535425	
9	4	0,2105263158	0,1646532944	0,5568684320	-2,2089691187	
10	5	0,2631578947	0,1908789452	0,4392575381	-2,2601157057	
11	6	0,3157894737	0,2108440116	0,3189725433	-2,3105545255	
12	7	0,3684210526	0,2244088140	0,1960550496	-2,3601398613	
13	8	0,4210526316	0,2314360547	0,0705539498	-2,4087190575	
14	9	0,4736842105	0,2317911983	-0,0574747083	-2,4561672141	
15	10	0,5263157895	0,2253428444	-0,1879678770	-2,5023177974	
16	11	0,5789473684	0,2119630909	-0,3208556832	-2,5471846854	
17	12	0,6315789474	0,1915278892	-0,4560616219	-2,5904139944	
18	13	0,6842105263	0,1639173866	-0,5935027682	-2,6321028690	
19	14	0,7368421053	0,1290162593	-0,7330900073	-2,6719459978	
20	15	0,7894736842	0,0867140311	-0,8747282801	-2,7099711364	
21	16	0,8421052632	0,0369053794	-1,0183168482	-2,7460533847	#VALORE!
22	17	0,8947368421	-0,0205095727	-1,1637495713	-2,7800539648	0,87672621539506
23	18	0,9473684211	-0,0856249802	-1,3109152022	-2,8118896100	0,87672621539506
24	19	1,0000000000	-0,1585290152	-1,4596976941	-2,8415048092	0,87672621539506

La condizione di errore nella cella [F21] porterà alla comparsa del messaggio



Il grafico, in questo caso, è:



Le formule introdotte sono:

	A	B	C	D	E	F
20	15	=a+dx*I	=F(B20)	=df(B20)	=ddf(B20)	
21	16	=a+dx*I	=F(B21)	=df(B21)	=ddf(B21)	=FINewton(B21)
22	17	=a+dx*I	=F(B22)	=df(B22)	=ddf(B22)	=FINewton(B22)
23	18	=a+dx*I	=F(B23)	=df(B23)	=ddf(B23)	=FINewton(B23)
24	19	=a+dx*I	=F(B24)	=df(B24)	=ddf(B24)	=FINewton(B24)

La prova d’esecuzione mostra che se scegliamo il valore d’innesco in cui la funzione e la sua derivata prima hanno lo stesso segno, con segno costante della derivata seconda, la funzione iterativa di Newton converge al valore dello zero della funzione.

Prof. Ettore Limoli